



AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

Wytrzymałość Elementów Maszyn

Wykład Nr 9

Powłoki cienkościenne

studium przypadków; geometria powłok, promienie równoleżnikowe i południkowe; wzór Laplace'a; zależności na naprężenia w powłokach kulistych, walcowych i stożkowych; przykłady obliczeniowe.

**Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Projektowania i Eksploatacji Maszyn**

dr hab. inż. Tomasz Machniewicz, prof. AGH

machniew@agh.edu.pl

9.1. Powłoki cienkościenne – studium przypadków



Błonowy stan naprężenia



Budowa butli ciśnieniowych



Efekt testu rozwoju pęknięć gazociągu



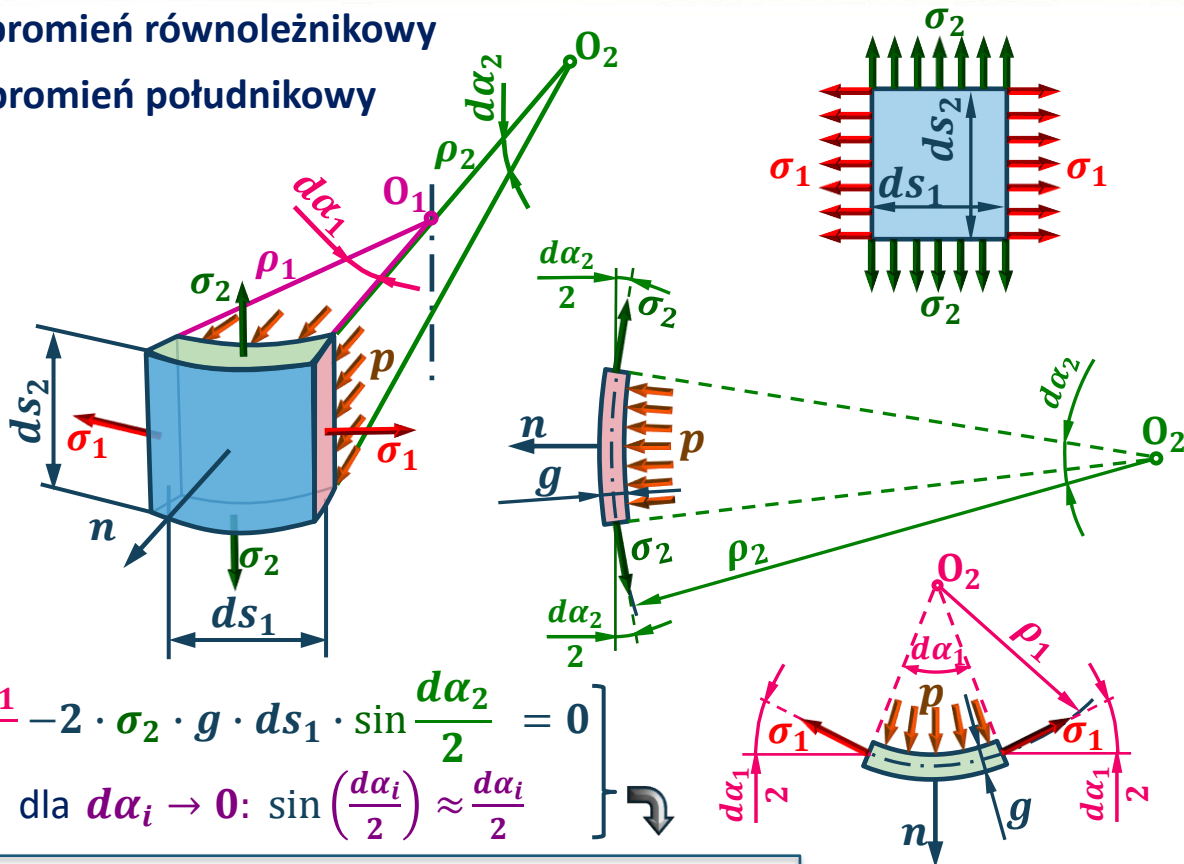
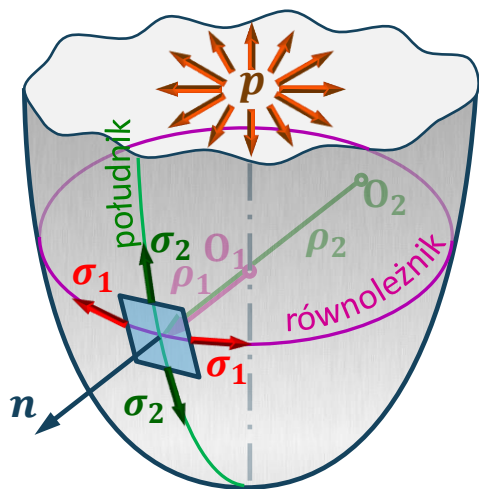
Katastrofa lotu Aloha Airlines 243 (1988)



9.2. Wzór Laplace'a

ρ_1 – promień równoleżnikowy

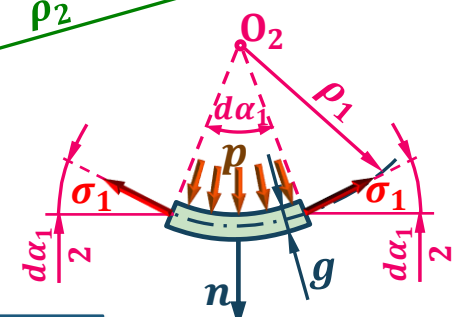
ρ_2 – promień południkowy



$$\sum P_{in} = 0 \Rightarrow$$

$$p \cdot ds_1 \cdot ds_2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot g \cdot ds_2 \cdot \sin \frac{d\alpha_1}{2} - 2 \cdot \sigma_2 \cdot g \cdot ds_1 \cdot \sin \frac{d\alpha_2}{2} = 0$$

$$ds_1 = \rho_1 \cdot d\alpha_1; \quad ds_2 = \rho_2 \cdot d\alpha_2; \quad \text{dla } d\alpha_i \rightarrow 0: \sin \left(\frac{d\alpha_i}{2} \right) \approx \frac{d\alpha_i}{2}$$



$$p \cdot \rho_1 \cdot d\alpha_1 \cdot \rho_2 \cdot d\alpha_2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot g \cdot \rho_2 \cdot d\alpha_2 \cdot \frac{d\alpha_1}{2} - 2 \cdot \sigma_2 \cdot g \cdot \rho_1 \cdot d\alpha_1 \cdot \frac{d\alpha_2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow p \rho_1 \rho_2 - \sigma_1 g \rho_2 - \sigma_2 g \rho_1 = 0 \Rightarrow \sigma_1 g \rho_2 + \sigma_2 g \rho_1 = p \rho_1 \rho_2 \quad /: (\rho_1 \rho_2 g)$$

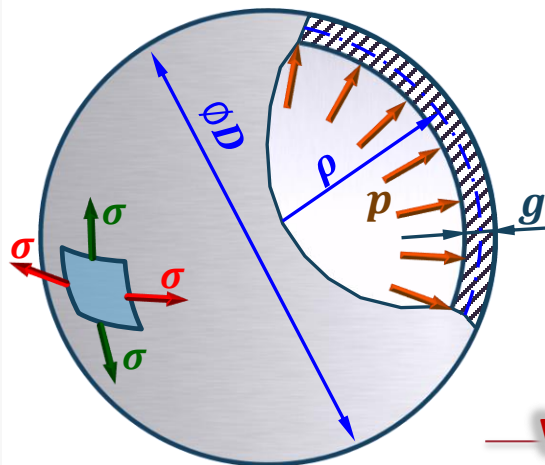
$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{g}$$

- wzór Laplace'a



Pierre Simon de Laplace (1749–1827)
francuski matematyk, astronom, geodeta i fizyk

9.3. Zbiorniki kuliste



Ze względu na symetrię układu:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma; \quad \rho_1 = \rho_2 = \frac{D}{2} \\ \text{z równ. Laplace'a: } \frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{2\sigma}{D} + \frac{2\sigma}{D} = \frac{p}{g} \Rightarrow \sigma = \frac{pD}{4g}$$

Wyłączenie

a) Według hipotezy Hubera:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq k_r \Rightarrow \sigma_{zr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma - \sigma)^2 + \sigma^2 + \sigma^2} = \sigma = \frac{pD}{4g}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma; \quad \sigma_3 = 0;$$

$$\sigma_{zr} = \frac{pD}{4g} \leq k_r \Rightarrow g \geq \frac{pD}{4k_r}$$

b) Według hipotezy τ_{max} :

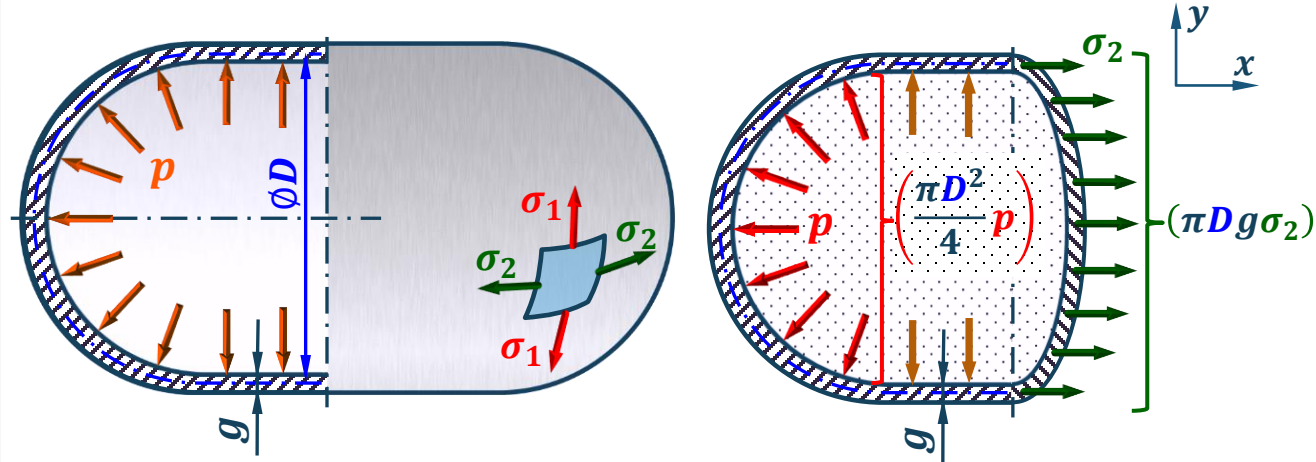
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zr} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq k_r \\ \sigma_1 = \sigma = \frac{pD}{4g} \\ \sigma_3 = 0; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_{zr} = \frac{pD}{4g} \leq k_r \Rightarrow g \geq \frac{pD}{4k_r}$$

Obydwie hipotezy prowadzą do tych samych warunków bezpieczeństwa.

9.3.1. Naprężenia główne



www.turbosquid.com



Dla zbiornika walcowego: $\rho_1 = \frac{D}{2}; \rho_2 = \infty$

z rów. Laplace'a: $\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{g}$

$$\Rightarrow \frac{2\sigma_1}{D} + 0 = \frac{p}{g} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{pD}{2g}$$

tj. dwukrotnie większe niż w zbiorniku kulistym.

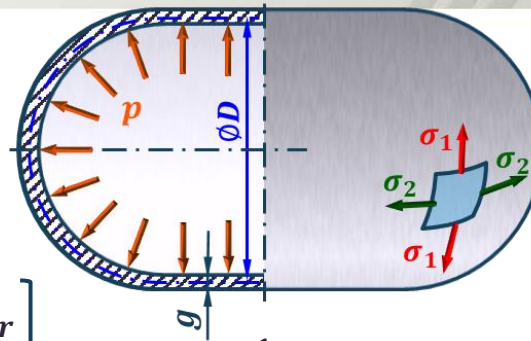
Z warunku równowagi parcia ciśnienia na dno zbiornika i naprężeń w przekroju południkowym:

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow \pi D g \sigma_2 - \frac{\pi D^2}{4} p = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{Dp}{4g} = \frac{\sigma_1}{2}$$

Naprężenia obwodowe w walczaku są dwukrotnie większe od naprężeń wzdłużnych ($\sigma_1 = 2\sigma_2$), co wyjaśnia najczęściej spotykany sposób pęknięcia tego typu obiektów.



9.3.2. Wytężenie



a) Według hipotezy Hubera:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq k_r$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 = 2\sigma_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{zr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_2^2 + (2\sigma_2)^2} = \sigma_2 \sqrt{3}$$

$$\sigma_2 = \frac{Dp}{4g}$$

$$\Rightarrow \sigma_{zr}^H = \frac{\sqrt{3}Dp}{4g} \leq k_r \quad \text{lub} \quad \sigma_{zr}^H = 0.433 \frac{Dp}{g} \leq k_r \quad \Rightarrow \quad g \geq \frac{\sqrt{3}Dp}{4k_r} \quad \text{lub} \quad g \geq 0.433 \frac{Dp}{k_r}$$

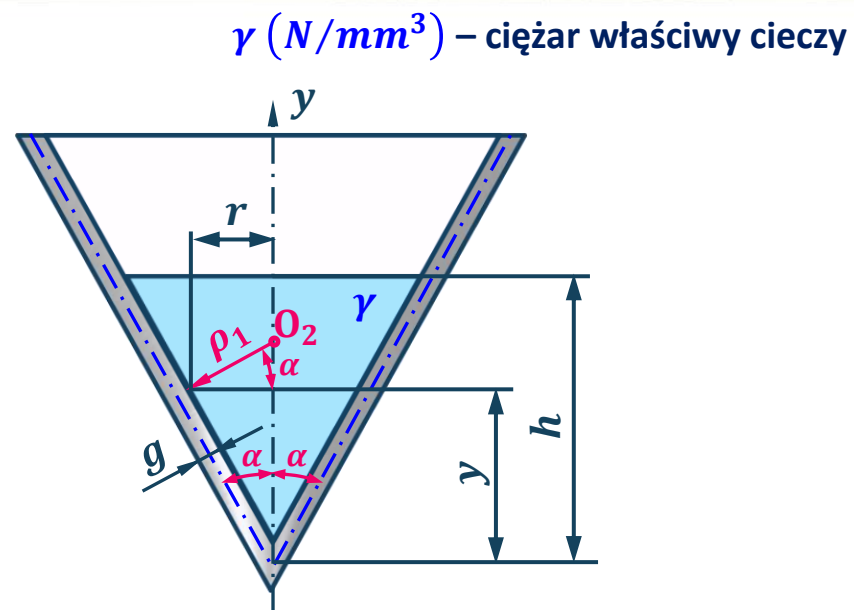
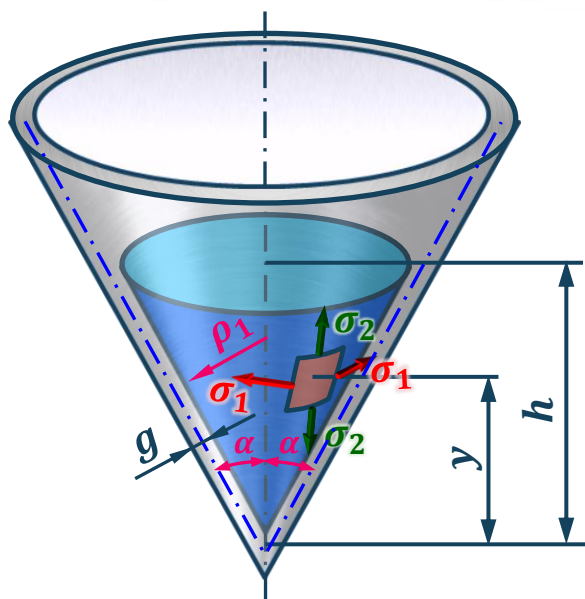
b) Według hipotezy τ_{max} :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{zr} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq k_r \\ \sigma_1 = \frac{Dp}{2g}; \quad \sigma_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{zr}^\tau = \frac{Dp}{2g} \leq k_r \quad \Rightarrow \quad g \geq \frac{pD}{2k_r}$$

Przy takim samym ciśnieniu i takiej samej średnicy, grubość ścianki zbiornika walcowego, w stosunku do zbiornika kulistego powinna być:

- 1,73 ($\sqrt{3}$) razy większa – wg hipotezy Hubera,
- 2 razy większa – wg hipotezy τ_{max}

9.3. Zbiorniki stożkowe



γ (N/mm³) – ciężar właściwy cieczy

Promień krzywizny: $\rho_1 = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{y \tan \alpha}{\cos \alpha}$; $\rho_2 = \infty$

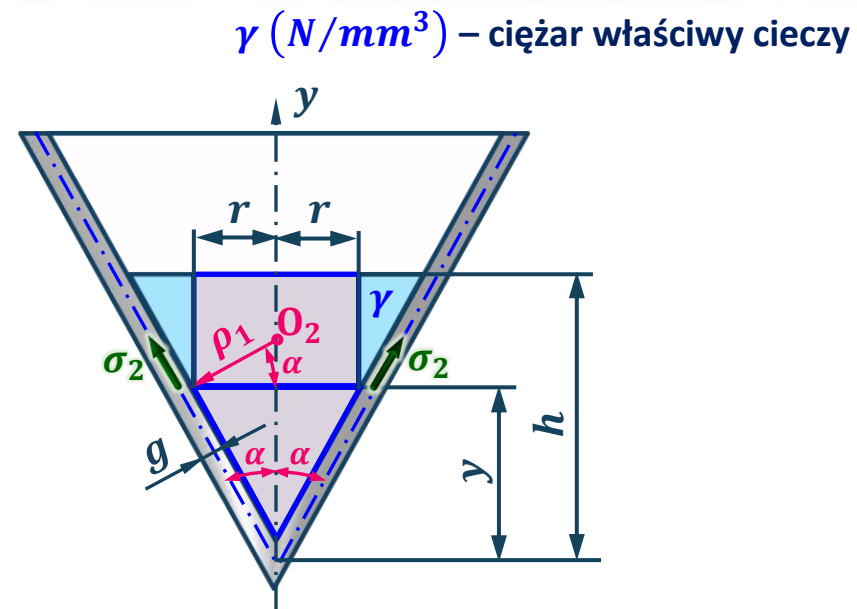
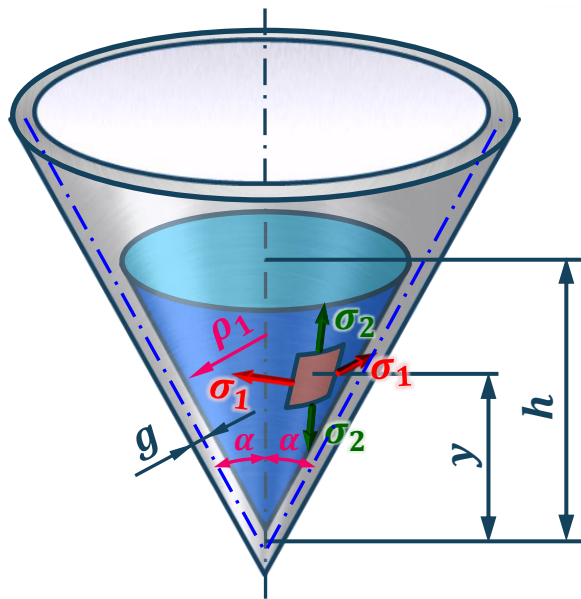
Ciśnienie w zbiorniku na wysokości y : $p = \gamma(h - y)$

z rów. Laplace'a: $\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{g}$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1 \cos \alpha}{y \tan \alpha} = \frac{\gamma(h - y)}{g}$$



$$\sigma_1 = \frac{\gamma(h - y)y \tan \alpha}{g \cos \alpha}$$



Z warunku równowagi naprężeń w ściankach zbiornika (σ_2) na wysokości (y) oraz ciężaru cieczy zamkniętej w objętości walca - o promieniu (r) i wysokości ($h - y$) - oraz stożka - o promieniu podstawy (r) i wysokości (y), wynika:

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow 2\pi r g \sigma_2 \cos \alpha = \left(\frac{1}{3} \pi r^2 y + \pi r^2 (h - y) \right) \gamma; \quad \text{uwzględniając: } r = y \tan \alpha;$$

$$\hookrightarrow 2\pi y \tan \alpha g \sigma_2 \cos \alpha = \left(\frac{1}{3} \pi y^3 (\tan \alpha)^2 + \pi y^2 (\tan \alpha)^2 (h - y) \right) \gamma$$

$$\hookrightarrow 2 g \sigma_2 \cos \alpha = y \gamma \tan \alpha \left(h - \frac{2}{3} y \right) \Rightarrow$$

$$\sigma_2 = \frac{y \tan \alpha \left(h - \frac{2}{3} y \right)}{2 g \cos \alpha} \gamma$$